

I - Intégrale d'une fonction sur un intervalle

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , F une primitive de f sur I , et a et b des réels de I .

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$\int_a^b f(x) dx$ se lit : « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x) dx$ ».

Vocabulaire : a et b sont les **bornes** (a est appelé **borne inférieure** et b **borne supérieure**).

Remarque : La variable par rapport à laquelle on intègre n'intervient pas dans le résultat. Cette lettre x peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre (sauf a, b, f, d).

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots \text{ On dit que la variable est } \textit{muette}.$$

Théorème (admis) :

Toute fonction continue sur $[a; b]$ admet une intégrale sur cet intervalle

II - PROPRIETES DE L'INTEGRALE

Dans tout le paragraphe, f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I , et a, b, c sont des réels de I .

1°) PROPRIETES ELEMENTAIRES

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^a f(x) dx = - \int_a^a f(x) dx$$

2°) LINEARITE

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

où k est une constante réelle

3°) POSITIVITE

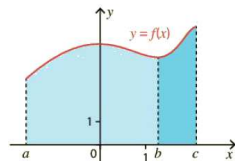
$$\text{Si } f \geq 0 \text{ et si } a \leq b \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Conséquence :

$$\text{Si } f \leq g \text{ sur } I \text{ et si } a \leq b \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

4°) RELATION DE CHASLES

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



5°) VALEUR MOYENNE

Définition :

$$\text{On appelle valeur moyenne de } f \text{ sur } [a; b] \text{ le nombre } \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

III - FONCTION INTEGRALE

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et $a \in I$.

Si on note F la primitive de f sur I s'annulant en a .

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I , qui s'annule en a .

IV - INTEGRATION PAR PARTIES

Théorème :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les dérivées sont continues sur I

$$\text{Pour tous réels } a \text{ et } b \text{ de } I, \int_a^b u v' = [u v]_a^b - \int_a^b u' v$$

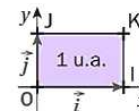
V - APPLICATIONS DU CALCUL INTEGRAL

1°) Unité d'aire

Définition :

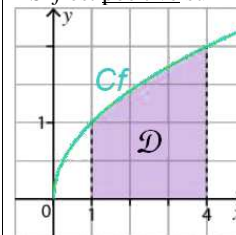
Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle unité d'aire (notée u.a.), l'aire du rectangle déterminé par les vecteurs du repère.

$$1 \text{ u.a.} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ cm}^2$$



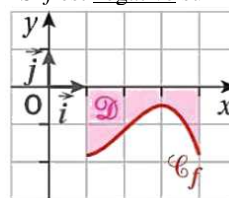
2°) Courbe et axe des abscisses

Si f est positive sur I



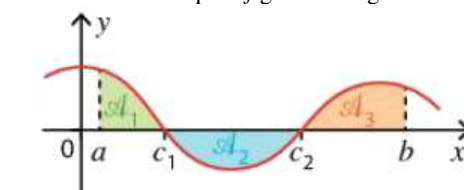
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Si f est négative sur I



$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

Si f change de signe sur I . On découpe I en intervalles sur lesquels f garde un signe constant



$$A = \int_a^{c_1} f(x) dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^b f(x) dx$$

3°) Entre deux courbes

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , et soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.

On suppose que $f \geq g$ sur $[a; b]$.

L'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes représentatives de f et g est :

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

